Komplexität jenseits der Vorstellungskraft

Eine Reise durch die Welt der großen Zahlen

Bachelorarbeit

Zur Erlangung des
Bachelor of Education (BEd)

an der School of Education der
Paris-Lodron-Universität Salzburg

Eingereicht von
JOHANNES BAISCHER
12127340

Betreuer: Ao.Univ.-Prof. Mag. Dr. Wolfgang Schmid
Fachbereich: Mathematik

Salzburg, Juni 2025

Zusammenfassung

Die Arbeit untersucht systematisch die Erzeugung und Einordnung extrem großer natürlicher Zahlen. Ausgehend von elementaren Operationen und grundlegenden Algorithmen wird ein sukzessiver Ausbau an Repräsentations- und Erzeugungsmechanismen präsentiert, mit dem Ziel, Wachstumsklassen zu vergleichen und eine Rangliste „großer Zahlen“ zu erstellen. Zunächst werden formale Grundlagen gelegt: Begriffe wie Algorithmus, Folgen, Turingmaschine sowie Landau-Notation ($\mathcal{O}$, Ω, Θ) dienen als Grundlage zur Bewertung des asymptotischen Wachstums und zur Einschätzung der Aussagekraft verschiedener Erzeugungsstrategien.

Anschließend folgen „naive“ Versuche, große Zahlen zu bilden – Wiederholte Addition und Multiplikation, Potenzen und Fakultäten – die zeigen, wie schnell einfache Operationen wachsen. Tetration (Wiederholung der Potenzierung) und höhere Iterationen (Pentation usw.) werden über Knuths Pfeilnotation eingeführt, um sehr schnell explodierendes Wachstum kompakt zu beschreiben. Die Ackermann-Funktion dient als natürliches, rekursives Weiterführen dieser Idee und demonstriert, wie indizierte Rekursion Operatoren beliebig in Stärke steigern kann.

Im Kapitel zu bekannten Zahlen werden historische und mathematisch relevante Beispiele analysiert. Graham's Number wird als rekursive Folge extrem verschachtelter Pfeiloperatoren vorgestellt und in den Kontext der Ramsey-Theorie eingeordnet. TREE(3) wird als Folge aus der Untersuchung von beschrifteten Bäumen und Einbettungsrelationen erklärt; der Satz von Kruskal garantiert zwar Endlichkeit, aber die resultierende Zahl übertrifft alle vorherigen Konstruktionen bei weitem. Die Busy-Beaver-Funktion BB(n) wird als Maß für die maximale Laufzeit n-Zustands-Turingmaschinen vorgestellt; ihr unberechenbares Wachstum macht sie zur oberen Grenze für alle berechenbaren Wachstumsraten. Rayo's Number nutzt formale Logik und Beschränkungen der Notationslänge und definiert die kleinste Zahl, die größer ist als jede in begrenzter Symbolanzahl beschreibbare Zahl – ein semantisch geschickt formulierter „Siegzug“, der im Big Number Duel die Diskussion entschied.

Die Arbeit verknüpft diese Beispiele durch eine Rangliste: an der Spitze stehen unberechenbare Konstrukte wie Rayo(10^{100}) und BB(10^{100}), gefolgt von TREE(3), Graham's Number und stark wachsenden, aber berechenbaren Funktionen (Ackermann-Instanzen, mehrfache Fakultäten, Potenztürme). Methodisch wird betont, dass nicht die absolute Darstellung, sondern die neue Idee hinter einer Konstruktion (z. B. Iteration eines Operators, Nutzung formaler Sprache oder Turing-Modelle) den höheren Rang rechtfertigt.

Praktische Implikationen und philosophische Fragen werden diskutiert: Grenzen der Darstellbarkeit, die Rolle der Berechenbarkeit und die Bedeutung von Notation und Sprache bei der Definition von Zahlen. Die Arbeit zeigt, dass die Mathematik Werkzeuge besitzt,

die formal unendliche Größenordnungen fassbar machen, gleichzeitig aber Grenzen (Halteproblem, Nicht-Berechenbarkeit) bestehen, die fundamentale Klassifizierungen vorgeben.

Wesentliche Abbildungen (Turingmaschine, Busy Beaver-Illustration, Startsequenz zu TREE(3)) illustrieren zentrale Konzepte: das abstrakte Berechnungsmodell, die Idee der maximalen Laufzeit und die rasante Entwicklung von Baumfolgen. Diese Visualisierungen unterstützen das Verständnis der strukturellen Mechanismen hinter den extremen Wachstumsraten.

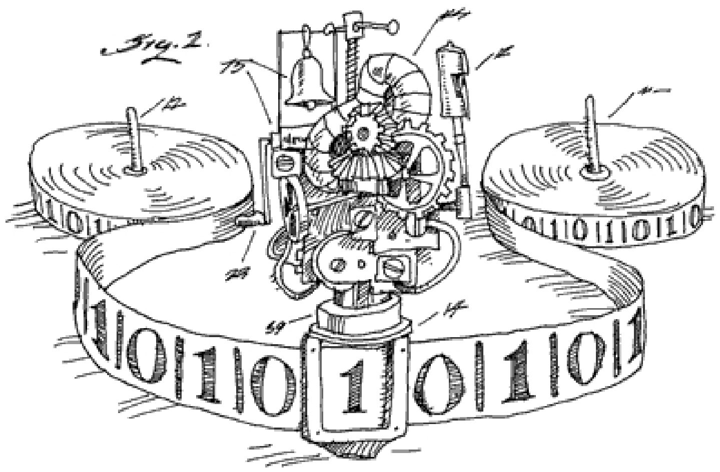

Abbildung 1: Schematische Darstellung einer Turingmaschine (Konzept der Berechenbarkeit).

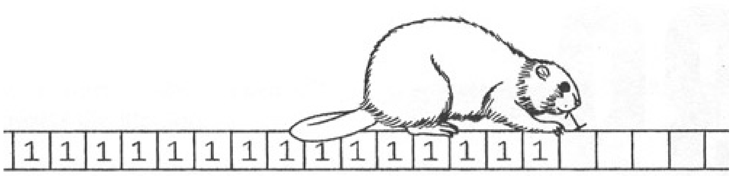

Abbildung 2: Illustration zur Busy-Beaver-Idee: maximale Schrittzahl vor Halten.

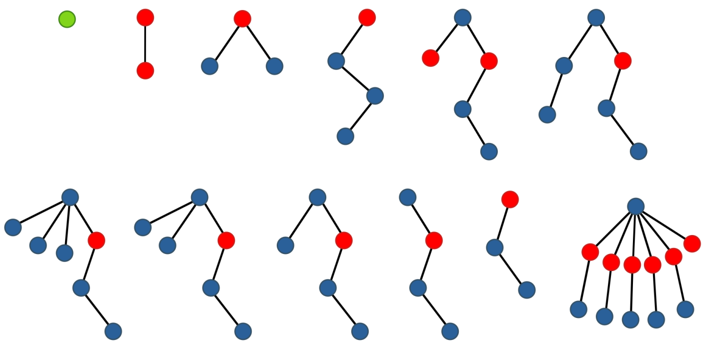

Abbildung 3: Beispielstart einer Sequenz, die zur Definition von TREE(3) führt.

Rang	Ausdruck	Abschätzung	Beschreibung
1	$Rayo(10^{100})$	***Unberechenbar!***	Rayo's Number
2	$BB(10^{100})$	***Unberechenbar!***	Busy Beaver
3	$TREE(3)$	↯↯	Baumfolge
4	G_{64}	↯	Graham's Number
5	$A_6(6)$	$= \underbrace{6 \uparrow\uparrow\uparrow (6 \uparrow\uparrow\uparrow (6 \ldots))}_{\text{6-fache Anwendung der Pentation}}$	Ackermann Funktion
6	$2 \uparrow\uparrow\uparrow 4$	$= 2 \uparrow\uparrow 65536 = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}$ *(Höhe 65536)*	Pentation
7	$(52!)!$	$> 10^{10^{70}}$	Doppelte Fakultät
8	$f_{WSM}(100)$	$>= 10^{200}$	Wiederholte Selbst-Multiplikation
9	$f_{WSA}(1000000)$	$>= 10^{12}$	Wiederholte Selbst-Addition
10	333333333	$> 10^{9}$	Füllen der Tafel
11	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	< 1000	Explizite Multiplikation
12	$3 + 3 + 3 + 3 + 3$	< 100	Explizite Addition
13	1	< 10	Kleinste natürliche Zahl